

*Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών*

---

## 20. Η Διαχρονική Προσέγγιση και το Υπόδειγμα του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

1412 Μακροοικονομική Θεωρία  
II

Καθ. Γιώργος Αλογοσκούφης

---

---

# Η Διαχρονική Προσέγγιση

---

Η διαχρονική προσέγγιση είναι η κυρίαρχη θεωρητική προσέγγιση στη σύγχρονη μακροοικονομική.

Η διαχρονική προσέγγιση βασίζεται πλήρως στη νεοκλασική μικροοικονομική, καθώς βασίζεται στην υπόθεση ότι τα νοικοκυριά μεγιστοποιούν τη διαχρονική χρησιμότητα τους και οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν την παρούσα αξία των κερδών τους, υπό τους κατάλληλους δυναμικούς περιορισμούς που προέρχονται από τους υφιστάμενους πόρους, την τεχνολογία και τη λειτουργία των αγορών.

Η προσέγγιση βασίζεται στην έννοια της γενικής διαχρονικής ισορροπίας, είτε μέσω της λειτουργίας πλήρως ανταγωνιστικών αγορών, είτε μέσω αγορών που υπόκεινται σε διάφορες στρεβλώσεις σε σχέση με το ανταγωνιστικό υπόδειγμα. Οι σχετικές τιμές (όπως τα πραγματικά επιτόκια και οι πραγματικοί μισθοί) και τα ονομαστικά μεγέθη (όπως το επίπεδο τιμών, ο πληθωρισμός και τα ονομαστικά επιτόκια) υποτίθεται ότι καθορίζονται μέσω κατάλληλων εννοιών γενικής ισορροπίας, οι οποίες εξαρτώνται από τη διάρθρωση της αγοράς και τις παραδοχές σχετικά με την τιμή και ευελιξία μισθών.

Οι ιδιότητες των διαχρονικών υποδειγμάτων εξαρτώνται από την έννοια της ισορροπίας που χρησιμοποιείται, από την υποτιθέμενη φύση της και τις υποτιθέμενες στρεβλώσεις καθώς και από τις παραδοχές που υιοθετούνται σχετικά με το βαθμό ευελιξίας τιμών και μισθών.

---

# Το Υπόδειγμα Δύο Περιόδων του Fisher

---

Σε αυτή τη διάλεξη εστιάζουμε σε ανταγωνιστικές οικονομίες που διαρκούν μόνο για δύο περιόδους, την περίοδο 1, το παρόν και την περίοδο 2, το μέλλον. Το ανταγωνιστικό υπόδειγμα δύο περιόδων, το οποίο οφείλεται στον Fisher (1930), είναι το απλούστερο δυνατό διαχρονικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας και μπορεί να αναλυθεί με τη βοήθεια σχετικά απλών μαθηματικών εργαλείων.

Το χρησιμοποιούμε για να διερευνήσουμε μερικά από τα κεντρικά χαρακτηριστικά της διαχρονικής προσέγγισης, χωρίς τη μαθηματική πολυπλοκότητα και άλλες επιπλοκές που εμφανίζονται σε δυναμικά υποδείγματα γενικής ισορροπίας πολλαπλών περιόδων.

Ξεκινάμε με τη διερεύνηση της γενικής ανταγωνιστικής ισορροπίας σε ένα μακροοικονομικό υπόδειγμα μιας περιόδου, με εξωγενές κεφάλαιο και αριθμό εργαζομένων. Στη συνέχεια, διερευνούμε τη διαχρονική γενική ισορροπία σε ένα ανταγωνιστικό μακροοικονομικό υπόδειγμα δύο περιόδων, το οποίο επιτρέπει την ύπαρξη αποταμιεύσεων και επενδύσεων.

Πολλά από τα θέματα που εξετάζονται μέσω του υποδείγματος δύο περιόδων μπορούν να επεκταθούν στο πλαίσιο υποδειγμάτων περισσότερων περιόδων.

---

# Ένα Ανταγωνιστικό Υπόδειγμα Μιας Περιόδου

---

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαχρονική προσέγγιση και τις διαφορές της από τις μη διαχρονικές προσεγγίσεις, αναλύουμε πρώτα ένα ανταγωνιστικό μακροοικονομικό υπόδειγμα μιας περιόδου χωρίς αποταμιεύσεις και επενδύσεις.

Σε αυτό το υπόδειγμα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πανομοιότυπων νοικοκυριών, με τα ίδια αποθέματα κεφαλαίου και εργασίας και τις ίδιες προτιμήσεις. Τα νοικοκυριά ζουν μόνο για μία περίοδο. Επομένως δεν υπάρχουν αποταμιεύσεις και επενδύσεις. Δεδομένου ότι όλα τα νοικοκυριά είναι πανομοιότυπα και αντιμετωπίζουν τις ίδιες ανταγωνιστικές τιμές, μπορούμε έτσι να αναλύσουμε τη συμπεριφορά ενός από αυτά, του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού.

Θα διατηρήσουμε την έννοια ενός αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού σε όλη τη διάρκεια αυτής της διάλεξης.

Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μια σειρά από πανομοιότυπες ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, οι οποίες εκμισθώνουν κεφάλαιο και εργασία από τα νοικοκυριά και παράγουν ένα πανομοιότυπο προϊόν. Δεδομένου ότι όλες οι επιχειρήσεις είναι πανομοιότυπες και αντιμετωπίζουν τις ίδιες ανταγωνιστικές τιμές για το αγαθό που παράγουν και τους συντελεστές παραγωγής που εκμισθώνουν, θα αναλύσουμε επίσης τη συμπεριφορά μόνο μιας από αυτές, της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.

---

# Διαθέσιμοι Πόροι, Προτιμήσεις και η Βέλτιστη Συμπεριφορά του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

---

Το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό ζει για μια περίοδο και χαρακτηρίζεται από τους διαθέσιμους πόρους και τις προτιμήσεις του.

Υποθέτουμε ότι το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό είναι προικισμένο με μία μονάδα κεφαλαίου και μία μονάδα εργασίας. Το απόθεμα κεφαλαίου και εργασίας του μπορεί να εκμισθωθεί σε ιδιωτικές επιχειρήσεις, σε ανταγωνιστική τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r$  και σε ανταγωνιστικό πραγματικό μισθό  $w$ .

Το κεφάλαιο  $k$  και η εργασία  $l$  χρησιμοποιούνται από ανταγωνιστικές επιχειρήσεις στην παραγωγή ενός ενιαίου αγαθού  $y$ , το οποίο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το κεφάλαιο του νοικοκυριού.

Το νοικοκυριό μπορεί να χρησιμοποιήσει το εισόδημα από την εκμίσθωση του κεφαλαίου και της εργασίας του για κατανάλωση, και μπορεί επίσης να καταναλώσει το κεφάλαιο του στο τέλος της περιόδου.

---

# Οι Περιορισμοί Από τους Διαθέσιμους Πόρους του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

---

$$c \leq 1 + rk + wl$$

$$k \leq 1$$

$$l \leq 1$$

*Ερμηνεία των περιορισμών από τους διαθέσιμους πόρους:*

Η κατανάλωση δεν μπορεί να υπερβεί το άθροισμα του εισοδήματος και του κεφαλαίου του νοικοκυριού. Αυτός είναι ο εισοδηματικός περιορισμός των νοικοκυριών.

Επιπρόσθετα, το νοικοκυριό δεν μπορεί να εκμισθώσει περισσότερες από μια μονάδες κεφαλαίου και εργασίας. Αυτοί είναι οι περιορισμοί των διαθέσιμων πόρων.

---

# Οι Προτιμήσεις του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

---

Οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού περιγράφονται από μια συνεχή, διπλά διαφοροποιούμενη, κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας  $u$ , η οποία εξαρτάται από τον όγκο της κατανάλωσης  $c$  του μοναδικού προϊόντος.

$$u(c)$$

Η συνάρτηση χρησιμότητας ικανοποιεί,

$$u' = \frac{\partial u}{\partial c} > 0, u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0$$

Η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης θεωρείται θετική αλλά μειούμενη. Η υπόθεση μιας αυστηρά θετικής οριακής χρησιμότητας σε όλα τα επίπεδα κατανάλωσης συνεπάγεται ότι οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού χαρακτηρίζονται από μη κορεσμό. Ως εκ τούτου, το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό προτιμά πάντα περισσότερη από λιγότερη κατανάλωση.

---

# Μεγιστοποίηση της Χρησιμότητας υπό τους Περιορισμούς των Υφιστάμενων Πόρων

---

Για να βρούμε τις συνθήκες πρώτης τάξεως για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, υπό τους περιορισμούς των διαθέσιμων πόρων, διαμορφώνουμε την ακόλουθη συνάρτηση Lagrange.

$$\mathcal{L} = u(c) - \lambda_1 (c - 1 - rk - wl) - \lambda_2(k - 1) - \lambda_3(l - 1)$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange για τους τρεις περιορισμούς.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης συνεπάγονται ότι,

$$\lambda_1 = u', \lambda_2 = \lambda_1 r, \lambda_3 = \lambda_1 w$$



---

# Συνέπειες των Συνθηκών Πρώτης Τάξεως για τη Μεγιστοποίηση της Χρησιμότητας

---

Η ερμηνεία αυτών των συνθηκών πρώτης τάξης είναι απλή. Η πρώτη υποδηλώνει ότι η σκιώδης τιμή του εισοδηματικού περιορισμού  $\lambda_1$  θα είναι θετική, καθώς η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης είναι πάντα θετική. Ως εκ τούτου, το νοικοκυριό θα καταναλώσει όλο το τρέχον εισόδημά του, καθώς και το κεφάλαιο που διαθέτει στο τέλος της περιόδου. Ο εισοδηματικός περιορισμός θα ικανοποιηθεί με ισότητα.

Δεδομένου ότι το  $\lambda_1$  είναι θετικό, οι άλλοι δύο πολλαπλασιαστές  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$  θα είναι επίσης θετικοί για μια θετική πραγματική τιμή εκμίσθωσης κεφαλαίου  $r$  και έναν θετικό πραγματικό μισθό  $w$ . Ως εκ τούτου, το νοικοκυριό θα εκμισθώσει το σύνολο του διαθέσιμου κεφαλαίου του και της εργασίας για παραγωγική χρήση. Οι περιορισμοί των πόρων θα ικανοποιούνται επίσης με την ισότητα.

Ως εκ τούτου, από την υπόθεση του μη κορεσμού, το νοικοκυριό θα εκμισθώσει το σύνολο του κεφαλαίου και της διαθέσιμης εργασίας του, αρκεί να εισπράτει μια θετική τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r$  και έναν θετικό πραγματικό μισθό  $w$ . Θα καταναλώσει επίσης όλο το εισόδημά του, καθώς και το κεφάλαιο του.

Ως αποτέλεσμα, το νοικοκυριό θα επιλέξει το  $c$  προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα του, υπό τους περιορισμούς των πόρων με ισότητα. Η προσφορά κεφαλαίου και εργασίας στις επιχειρήσεις, και ως εκ τούτου η ζήτηση κατανάλωσης θα ισούται με,

$$k = 1, l = 1, c = 1 + r + w$$

Θα υπάρξει πλήρης απασχόληση των διαθέσιμων πόρων και το νοικοκυριό θα καταναλώσει το σύνολο του εισοδήματός του, συν το αρχικό απόθεμα του κεφαλαίου του.

---

# Επιχειρήσεις και η Τεχνολογία της Παραγωγής

---

Το προϊόν παράγεται από ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, οι οποίες εκμισθώνουν συντελεστές παραγωγής, όπως το κεφάλαιο και η εργασία, από τα νοικοκυριά, μέσω ανταγωνιστικών αγορών για συντελεστές παραγωγής. Όλες οι επιχειρήσεις έχουν πρόσβαση στην ίδια τεχνολογία παραγωγής και παράγουν ένα ομοειδές προϊόν  $y$ , μέσω της ακόλουθης νεοκλασικής συνάρτησης παραγωγής.

$$y = AF(k, l)$$

$A$  είναι μια εξωγενής τεχνολογική παράμετρος, που υποδηλώνει τη συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών, και το  $F$  είναι μια συνεχής, διπλά διαφοροποιούμενη, οιονεί κοίλη συνάρτηση. Οι παράγοντες παραγωγής είναι το κεφάλαιο  $k$  και η εργασία  $l$ .

Το οριακό προϊόν και των δύο παραγόντων παραγωγής είναι θετικό, αλλά μειούμενο. Επιπλέον, το οριακό προϊόν κάθε συντελεστή παραγωγής είναι μια θετική συνάρτηση της χρήσης του άλλου συντελεστή.

Οι σταθερές κλίμακας υποδηλώνουν ότι εάν όλοι οι παράγοντες παραγωγής πολλαπλασιαστούν με οποιονδήποτε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό, ας πούμε  $\mu$ , η κλίμακα παραγωγής πολλαπλασιάζεται επίσης με  $\mu$ .

# Ιδιότητες της Συνάρτησης Παραγωγής

Σε μαθηματική μορφή οι ιδιότητες της συνάρτησης παραγωγής μπορούν να γραφούν ως,

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial k} > 0, F_l = \frac{\partial F}{\partial l} > 0, F_{kk} = \frac{\partial^2 F}{\partial k^2} < 0, F_{kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial l} > 0, F_{ll} = \frac{\partial^2 F}{\partial l^2} < 0, F_{lk} = \frac{\partial^2 F}{\partial l \partial k} > 0$$

Λόγω της υπόθεσης σταθερών αποδόσεων κλίμακας, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλους τους παράγοντες με  $1/l$  και η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να γραφτεί με όρους παραγωγής και κεφαλαίου ανά εργαζόμενο, ως,

$$\hat{y} = AF(\hat{k}, 1) = Af(\hat{k})$$

όπου,  $f(0) = 0, f'(\hat{k}) = \frac{\partial f}{\partial \hat{k}} > 0, f''(\hat{k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{k}^2} < 0$ .  $\hat{y} = y/l$  και  $\hat{k} = k/l$  υποδηλώνουν το προϊόν και το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο. Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου ανά εργαζόμενο είναι θετικό αλλά φθίνον.

# Οι Συνέπειες της Μεγιστοποίησης των Κερδών εκ μέρους των Επιχειρήσεων

Οι επιχειρήσεις είναι ανταγωνιστικές και θεωρείται ότι μεγιστοποιούν τα πραγματικά κέρδη τους επιλέγοντας κεφάλαιο και εργασία και ως εκ τούτου το επίπεδο παραγωγής, λαμβάνοντας ως δεδομένες τις τιμές του προϊόντος, της εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r$  και της εργασίας  $w$  δεδομένο. Ως εκ τούτου, επιλέγουν το κεφάλαιο και την εργασία για να μεγιστοποιήσουν,

$$\mathcal{P} = AF(k, l) - rk - wl = l(Af(\hat{k}) - r\hat{k} - w)$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση, οι επιχειρήσεις θα απασχολούν κεφάλαιο και εργασία έως το σημείο όπου το οριακό προϊόν του κεφαλαίου είναι ίσο με την τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r$  και μέχρι το σημείο όπου το οριακό προϊόν της εργασίας είναι ίσο με τον πραγματικό μισθό,  $w$ . Σημειώστε ότι λόγω της υπόθεσης για σταθερές αποδόσεις κλίμακας, οι συνολικές αμοιβές των συντελεστών είναι ίσες με τη συνολική παραγωγή και οι εταιρείες κάνουν μηδενικά κέρδη.

$$r = AF_k = Af'(\hat{k}), \quad w = AF_l = Af(\hat{k}) - \hat{k}Af'(\hat{k})$$

Δεδομένου ότι οι επιχειρήσεις δραστηριοποιούνται σε ανταγωνιστικές αγορές, όλες αντιμετωπίζουν τις ίδιες τιμές των συντελεστών. Δεδομένου επίσης ότι θεωρείται ότι έχουν πρόσβαση στην ίδια τεχνολογία, όλες θα επιλέξουν τις ίδιες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε την ανάλυσή μας στο πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.

# Η Συνάρτηση Παραγωγής Cobb Douglas

Προκειμένου να συνάγουμε ρητές λύσεις για τις συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής και την προσφορά προϊόντος από την αντιπροσωπευτική εταιρεία, πρέπει να κάνουμε σαφείς υποθέσεις σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης παραγωγής. Για αναλυτική απλότητα, θα περιορίσουμε την ανάλυσή μας στη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas της μορφής,

$$y = Ak^\alpha l^{1-\alpha}$$

όπου  $0 < \alpha < 1$  είναι μια σταθερά παράμετρος, η οποία υποδηλώνει την ελαστικότητα του προϊόντος σε σχέση με το κεφάλαιο. Η παράμετρος  $1 - \alpha$  υποδηλώνει την ελαστικότητα του προϊόντος σε σχέση με την εργασία.

Οι συνθήκες μεγιστοποίησης των κερδών για τη συνάρτηση παραγωγής Cobb Douglas συνεπάγονται ότι,

$$r = \alpha Ak^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = \alpha A\hat{k}^{\alpha-1}, \quad w = (1 - \alpha)Ak^\alpha l^{-\alpha} = (1 - \alpha)A\hat{k}^\alpha$$

# Γενική Ανταγωνιστική Ισορροπία σε ένα Ανταγωνιστικό Υπόδειγμα Μίας Περιόδου

Στη γενική ισορροπία η απασχόληση, η παραγωγή, η κατανάλωση, οι πραγματικοί μισθοί και η πραγματική τιμή μίσθωσης του κεφαλαίου θα καθοριστούν από την ισότητα της προσφοράς συντελεστών παραγωγής από τα νοικοκυριά και τη ζήτηση για συντελεστές παραγωγής από τις επιχειρήσεις, και την ισότητα της ζήτησης και προσφοράς του συνολικού προϊόντος. Δεδομένου ότι η προσφορά κεφαλαίου και εργασίας έχει αποδειχθεί ότι ισούται με τους πόρους του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, οι οποίοι προσδιορίζονται εξωγενώς και ισούνται με τη μονάδα, το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο στην παραγωγή θα είναι επίσης ίσο με την μονάδα. Θα έχουμε έτσι,

$$k = 1, l = 1, \hat{k} = 1$$

$$y = A$$

$$r = \alpha A, w = (1 - \alpha)A$$

Σημειώστε ότι δεδομένου ότι τα αποθέματα κεφαλαίου και εργασίας ισούνται με τη μονάδα, η παραγωγή ισορροπίας θα είναι ίση με τη συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών  $A$ . Η τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου ισορροπίας θα είναι ίση με τη συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών επί το μερίδιο του κεφαλαίου στην παραγωγή, ενώ ο πραγματικός μισθός της ισορροπίας θα είναι ίσος με τη συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών, επί το μερίδιο της εργασίας στην παραγωγή. Αυτά είναι τα οριακά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας για αναλογία κεφαλαίου εργασίας ίση με ένα, όπως υποδηλώνουν οι παραδοχές μας σχετικά με τους πόρους του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Σημειώστε επίσης ότι, λόγω της υπόθεσης για σταθερές αποδόσεις κλίμακας, οι συντελεστές πληρωμών στα νοικοκυριά εξαντλούν τη συνολική παραγωγή.

---

# Ιδιότητες της Γενικής Ισορροπίας σε Ένα Ανταγωνιστικό Υπόδειγμα μιας Περιόδου

---

Η ανταγωνιστική ισορροπία εξαρτάται από τις προτιμήσεις και τους πόρους του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού και από την τεχνολογία παραγωγής που χρησιμοποιείται από την αντιπροσωπευτική επιχείρηση.

Λόγω της υπόθεσης του μη κορεσμού, τα νοικοκυριά προσφέρουν το σύνολο των διαθέσιμων πόρων τους για να χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή και καταναλώνουν τόσο το τρέχον εισόδημά τους όσο και το κεφάλαιο τους.

Στην ισορροπία, οι κύριοι καθοριστικοί παράγοντες των πραγματικών μεταβλητών είναι οι πόροι και οι προτιμήσεις των νοικοκυριών, και οι παράμετροι της τεχνολογίας παραγωγής, όπως η συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών  $A$  και το μερίδιο του κεφαλαίου  $\alpha$  στην περίπτωση της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas .

Τέλος, υπάρχει πλήρης απασχόληση τόσο του κεφαλαίου όσο και της εργασίας.

---

# Αποταμιεύσεις και Επενδύσεις σε Ένα Υπόδειγμα Δύο Περιόδων

---

Το πρόβλημα των νοικοκυριών στο υπόδειγμα μιας περιόδου είναι σχετικά απλό. Χρησιμοποιείτε πλήρως το κεφάλαιο και την εργασία σας στην παραγωγική διαδικασία, εισπράτοντας το μέγιστο δυναμό εισόδημα και καταναλώστε όλο το εισόδημά σας συν τους πόρους που μπορούν να καταναλωθούν, όπως το κεφάλαιο.

Στη συνέχεια στρεφόμαστε στην παρουσίαση του απλούστερου δυνατού διαχρονικού υποδείγματος γενικής ισορροπίας. Αυτό είναι ένα υπόδειγμα δύο περιόδων, το οποίο αναλύθηκε για πρώτη φορά ρητά από τον Irving Fisher στο κλασικό του βιβλίο του 1930, Η Θεωρία του Τόκου. Όπως θα δούμε, το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό σε ένα υπόδειγμα δύο περιόδων αντιμετωπίζει ένα σύνολο ευρύτερων επιλογών από ό, τι στο υπόδειγμα μιας περιόδου.

Σε ένα υπόδειγμα δύο περιόδων το νοικοκυριό πρέπει να λαμβάνει διαχρονικές αποφάσεις, η πιο σημαντική από τις οποίες είναι η απόφαση αποταμίευσης και επένδυσης κατά την πρώτη περίοδο.



# Το Αντιπροσωπευτικό Νοικοκυριό σε Ένα Υπόδειγμα Δύο Περιόδων

Ας υποθέσουμε ένα αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό που ζει για δύο περιόδους, ας πούμε την περίοδο 1, το παρόν και την περίοδο 2, το μέλλον. Όπως και στο υπόδειγμα μιας περιόδου, το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό χαρακτηρίζεται από τους πόρους και τις προτιμήσεις του.

Θα υποθέσουμε ότι το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό διαθέτει μια μονάδα κεφαλαίου στην περίοδο 1 και μία μονάδα εργασίας για καθεμία από τις περιόδους 1 και 2. Θα υποθέσουμε επίσης ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα και ότι το νοικοκυριό έχει τέλεια γνώση των εξελίξεων στην περίοδο 2.

Στην περίοδο 1, το κεφάλαιο και η εργασία του μπορούν να εκμισθωθούν σε επιχειρήσεις, σε ανταγωνιστική τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r_1$  και σε ανταγωνιστικό πραγματικό μισθό  $w_1$ . Το κεφάλαιο και η εργασία χρησιμοποιούνται από ανταγωνιστικές επιχειρήσεις για την παραγωγή ενός ενιαίου αγαθού  $y_1$

Το νοικοκυριό μπορεί να χρησιμοποιήσει το εισόδημα από την εκμίσθωση του κεφαλαίου και της εργασίας του κατά την περίοδο 1 για κατανάλωση ή επένδυση.

Στην περίοδο 2, το κεφάλαιο ισούται με το αρχικό κεφάλαιο, συν τις επενδύσεις του από την πρώτη περίοδο. Αποφασίζει και πάλι να εκμισθώσει το κεφάλαιο και την εργασία του, σε ανταγωνιστική τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r_2$  και σε έναν ανταγωνιστικό πραγματικό μισθό  $w_2$ . Στο τέλος της περιόδου 2 το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό καταναλώνει το εισόδημά του της περιόδου 2,  $y_2$ , συν το κεφάλαιο που μεταφέρεται από την περίοδο 1.

Έτσι, η κύρια απόφαση των νοικοκυριών, εκτός από την απόφαση να εκμισθώσουν το σύνολο του κεφαλαίου και την εργασία τους, για να μεγιστοποιήσουν το εισόδημα τους σε καθεμία από τις δύο περιόδους, είναι το πόσο πρέπει να καταναλώσουν στην περίοδο 1 σε σχέση με την περίοδο 2. Όπως θα δούμε, αυτό εξαρτάται από τη μελλοντική απόδοση της επένδυσης. Ως εκ τούτου, σε αντίθεση με το υπόδειγμα μιας περιόδου, στο οποίο η τιμή μίσθωσης του κεφαλαίου είναι μία καθαρή πρόσοδος, για δεδομένους πόρους, στο διαχρονικό υπόδειγμα δύο περιόδων το επιτόκιο της δεύτερης περιόδου ενεργεί ως κίνητρο για αποταμιεύσεις και επενδύσεις.

---

# Η Διαχρονική Συνάρτηση Χρησιμότητας

---

Το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό θεωρείται ότι μεγιστοποιεί την ακόλουθη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας,

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_2)$$

Η συνάρτηση  $u$  είναι μια συνεχής, διπλά παραγωγίσιμη, κοίλη ανά περίοδο συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από τον όγκο κατανάλωσης της περιόδου. Έχει τις ίδιες ιδιότητες με τη συνάρτηση χρησιμότητας στο υπόδειγμα της μιας περιόδου.

$\rho$  είναι το καθαρό ποσοστό διαχρονικής προτίμησης, το οποίο είναι ένα μέτρο της ανυπομονησίας των νοικοκυριών, δηλαδή το κατά πόσο το νοικοκυριό προτιμά την τρέχουσα από τη μελλοντική χρησιμότητα. Δεδομένου ότι αυτή είναι μια θετική παράμετρος, το νοικοκυριό θεωρείται ανυπόμονο, καθώς προτιμά την τρέχουσα σε σχέση με τη μελλοντική χρησιμότητα.

Αυτή η συνάρτηση χρησιμότητας χαρακτηρίζεται από διαχρονική διαχωριστικότητα, καθώς η διαχρονική χρησιμότητα είναι το σταθμισμένο άθροισμα των χρησιμοτήτων ανά περίοδο και η χρησιμότητα σε κάθε περίοδο εξαρτάται μόνο από την κατανάλωση στη συγκεκριμένη περίοδο.

# Ο Διαχρονικός Εισοδηματικός Περιορισμός

Η διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας μεγιστοποιείται υπό την κάτωθι ακολουθία εισοδηματικών περιορισμών.

$$1 + r_1 k_1 + w_1 l_1 - c_1 = k_2, \quad c_2 = (1 + r_2)k_2 + w_2 l_2$$

Δεδομένου ότι τα νοικοκυριά θεωρούνται προικισμένα με μία μονάδα αρχικού κεφαλαίου και μία μονάδα εργασίας σε κάθε περίοδο, και με την υπόθεση του μη κορεσμού, θα παρέχουν πλήρως τους διαθέσιμους πόρους τους προς εκμίσθωση σε κάθε περίοδο. Αυτό συνεπάγεται ότι  $k_1 = 1, l_1 = l_2 = 1$  και η ακολουθία των εισοδηματικών περιορισμών μπορεί έτσι να γραφτεί ως,

$$1 + r_1 + w_1 - c_1 = k_2, \quad c_2 = (1 + r_2)k_2 + w_2$$

Αντικαθιστώντας για το  $k_2$  στον εισοδηματικό περιορισμό της πρώτης περιόδου από τον εισοδηματικό περιορισμό της δεύτερης περιόδου, έχουμε ότι,

$$c_1 + \frac{1}{1 + r_2} c_2 = (1 + r_1) + w_1 + \frac{1}{1 + r_2} w_2$$

Η παρούσα αξία της καταναλώσεως, με βάση το επιτόκιο της δεύτερης περιόδου, πρέπει να ισούται με το αρχικό κεφάλαιο, συν την παρούσα αξία του εισοδήματος του νοικοκυριού. Η δεξιά πλευρά του διαχρονικού εισοδηματικού περιορισμού του νοικοκυριού αποτελεί το συνολικό πλούτο του νοικοκυριού, καθώς αποτελείται από το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου του, συν την παρούσα αξία των εισοδημάτων από τους διαθέσιμους πόρους του, σε κεφάλαιο και εργασία.

# Επιλέγοντας τη Βέλτιστη Πορεία της Κατανάλωσης

Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι να μεγιστοποιήσει τη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας του, υπό τον διαχρονικό εισοδηματικό του περιορισμό. Η συνάρτηση Lagrange για αυτό το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως,

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho}u(c_2) - \lambda \left( c_1 + \frac{1}{1+r_2}c_2 - 1 - r_1 - w_1 - \frac{1}{1+r_2}w_2 \right)$$

όπου  $\lambda$  είναι ο σχετικός πολλαπλασιαστής Lagrange. Η οικονομική ερμηνεία του  $\lambda$  είναι ότι είναι η σκιώδης τιμή, ή η οριακή αξία του πλούτου των νοικοκυριών. Εφόσον το  $\lambda$  είναι θετικό, τότε η αξία μιας οριακής προσθήκης στον πλούτο του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι θετική.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξεως για τη βελτιστοποίηση, έχουμε,

$$u'(c_1) = \lambda, \quad \frac{1}{1+\rho}u'(c_2) = \frac{\lambda}{1+r_2}$$

Έτσι, στο βέλτιστο, το  $\lambda$ , η οριακή τιμή του πλούτου του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, είναι ίση με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης της πρώτης περιόδου. Στο βέλτιστο, το νοικοκυριό είναι αδιάφορο μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης, προκειμένου να αποκτήσει μια επιπλέον μονάδα πλούτου. Προεξοφλούμενο με το πραγματικό επιτόκιο της δεύτερης περιόδου, το  $\lambda$  ισούται επίσης με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης της δεύτερης περιόδου. Έτσι, στο βέλτιστο, το νοικοκυριό δεν έχει κίνητρο να αλλάξει την κατανάλωση από την περίοδο 1 στην περίοδο 2 ή το αντίστροφο.

# Η Εξίσωση Euler για την Κατανάλωση

Διαιρώντας τη δεύτερη με τη πρώτη συνθήκη πρώτης τάξεως για το βέλτιστο, λαμβάνουμε,

$$\frac{1}{1 + \rho} \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{1 + r_2}$$

Αυτή η συνθήκη είναι γνωστή ως η εξίσωση Euler για την κατανάλωση.

Η οικονομική ερμηνεία της είναι ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ μελλοντικής και τρέχουσας κατανάλωσης είναι ίσος με τον οριακό μετασχηματισμού της μελλοντικής κατανάλωσης σε τρέχουσα κατανάλωση, ή, το κόστος ευκαιρίας (τιμή) της μελλοντικής κατανάλωσης. Αυτό το κόστος ευκαιρίας ισούται με το αντίστροφο του ενός συν το πραγματικό επιτόκιο  $r_2$ .

Σημειώστε ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ τρέχουσας και μελλοντικής κατανάλωσης εξαρτάται από το πόσο κοίλη είναι η ανά περίοδο συνάρτηση χρησιμότητας  $u$ , διασφαλίζοντας ότι οι καμπύλες αδιαφορίας μεταξύ τρέχουσας και μελλοντικής κατανάλωσης θα είναι κυρτές προς την αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση Euler για κατανάλωση μπορεί να ξαναγραφεί ως,

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1 + \rho}{1 + r_2}$$

Η εξίσωση Euler υποδηλώνει ότι ο λόγος των καταναλώσεων στις δύο περιόδους εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχέση μεταξύ του πραγματικού επιτοκίου και του καθαρού ποσοστού διαχρονικής προτίμησης του νοικοκυριού. Το νοικοκυριό θα εξομαλύνει την κατανάλωσή του μεταξύ των δύο περιόδων, προσαρμόζοντας τις αποταμιεύσεις και τις επενδύσεις του, ανάλογα με τη σχέση μεταξύ του πραγματικού επιτοκίου και του καθαρού ποσοστού διαχρονικής προτίμησης.

---

# Συνέπειες της Εξίσωσης Euler για την Κατανάλωση

---

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1 + \rho}{1 + r_2}$$

Εάν  $\rho = r_2$ , τότε αυτό σημαίνει ότι  $c_1 = c_2$ , καθώς ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων της κατανάλωσης στις δύο περιόδους θα είναι ίσος με τη μονάδα. Η απόδοση των αποταμιεύσεων ισούται με το ποσοστό κατά το οποίο τα νοικοκυριά προεξοφλούν τη μελλοντική χρησιμότητα, και έτσι θα υπάρξει πλήρης εξομάλυνση της κατανάλωσης, καθώς τα νοικοκυριά θα είναι αδιάφορα μεταξύ της τρέχουσας και της μελλοντικής κατανάλωσης.

Εάν  $\rho > r_2$ , τότε αυτό σημαίνει ότι  $c_1 > c_2$ , καθώς ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων της κατανάλωσης στις δύο περιόδους θα είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα. Η απόδοση των αποταμιεύσεων είναι χαμηλότερη από το ποσοστό κατά το οποίο τα νοικοκυριά προεξοφλούν τη μελλοντική χρησιμότητα. Τα νοικοκυριά κατά συνέπεια θα προτιμούν την τρέχουσα από τη μελλοντική χρησιμότητα και κατά συνέπεια θα καταναλώνουν περισσότερο στην πρώτη παρά στη δεύτερη περίοδο. Η αποταμίευση θα είναι χαμηλότερη με επιτόκια χαμηλότερα από το ποσοστό διαχρονικής προτίμησης των νοικοκυριών.

Εάν  $\rho < r_2$ , τότε αυτό σημαίνει ότι  $c_1 < c_2$ , καθώς ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων της κατανάλωσης στις δύο περιόδους θα είναι μικρότερος από τη μονάδα. Η απόδοση των αποταμιεύσεων είναι υψηλότερη από το ποσοστό κατά το οποίο τα νοικοκυριά προεξοφλούν τη μελλοντική χρησιμότητα. Τα νοικοκυριά κατά συνέπεια θα προτιμούν τη μελλοντική από την τρέχουσα από χρησιμότητα και κατά συνέπεια θα καταναλώνουν λιγότερο στην πρώτη παρά στη δεύτερη περίοδο. Η αποταμίευση θα είναι υψηλότερη με επιτόκια υψηλότερα από το ποσοστό διαχρονικής προτίμησης των νοικοκυριών.

# Η Περίπτωση της Σταθερής Ελαστικότητας Διαχρονικής Υποκατάστασης της Κατανάλωσης

Για να αναλύσουμε περαιτέρω πώς η πορεία της κατανάλωσης εξαρτάται από το πραγματικό επιτόκιο, θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική, αλλά ευρέως χρησιμοποιούμενη, συνάρτηση χρησιμότητας, τη συνάρτηση χρησιμότητας με μια Σταθερή Ελαστικότητα της Διαχρονικής Υποκατάστασης της Κατανάλωσης (Constant Elasticity of Intertemporal Substitution, ή, CEIS). Αυτή παίρνει τη μορφή,

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

όπου  $1/\theta$  είναι η ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης. Αυτή η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αρκετά γενική και εκδοχές της χρησιμοποιούνται εκτενώς στη μακροοικονομική.

Η ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στην αναλογία κατανάλωσης στην περίοδο 2, σε σχέση με την κατανάλωση στην περίοδο 1, διαιρούμενη με την ποσοστιαία μεταβολή στον οριακό λόγο υποκατάστασης μεταξύ της κατανάλωσης στις δύο περιόδους, με τη χρησιμότητα να διατηρείται σταθερή. Είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας των διαχρονικών καμπυλών αδιαφορίας ή της ευκολίας με την οποία τα νοικοκυριά μπορούν να υποκαθιστούν την κατανάλωση διαχρονικά.

Μία ειδική της περίπτωση είναι η λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας. Αυτή ισοδυναμεί με ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης ίσης με τη μονάδα.

$$u(c_t) = \ln c_t$$

Επειδή η CEIS για  $\theta = 1$  δεν ορίζεται, χρησιμοποιούμε το κανόνα L'Hopital, στην πρώτη παράγωγο της CEIS, η οποία ισούται με  $c^{-\theta}$ . Για  $\theta = 1$  αυτή ισούται με  $1/c$ , που είναι η πρώτη παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης. Κατά συνέπεια, η CEIS τείνει στη λογαριθμική συνάρτηση καθώς το  $\theta$  τείνει προς τη μονάδα.

---

# Συναγωγή της Συνάρτησης Κατανάλωσης της Πρώτης Περιόδου

---

Για τη συνάρτηση χρησιμότητας CEIS, η εξίσωση Euler για την κατανάλωση μπορεί να γραφεί ως,

$$\frac{1}{1 + \rho} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{-\theta} = \frac{1}{1 + r_2}$$

Κατά συνέπεια, η κατανάλωση της πρώτης περιόδου ικανοποιεί,

$$c_1 = \left( \frac{1 + \rho}{1 + r_2} \right)^{\frac{1}{\theta}} c_2$$

Χρησιμοποιώντας τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό για να υποκαταστήσουμε για τη κατανάλωση της δεύτερης περιόδου  $c_2$ , και επιλύοντας, έχουμε ότι,

$$c_1 = \frac{(1 + \rho)^{1/\theta}}{(1 + \rho)^{1/\theta} + (1 + r_2)^{(1-\theta)/\theta}} \left( 1 + r_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} \right)$$

Η τρέχουσα κατανάλωση είναι ένα ποσοστό του συνολικού πλούτου των νοικοκυριών. Το ποσοστό εξαρτάται θετικά από το ποσοστό διαχρονικής προτίμησης των νοικοκυριών. Εξαρτάται επίσης από το πραγματικό επιτόκιο  $r_2$  και την ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης  $\theta$ .



# Ιδιότητες της Διαχρονικής Συνάρτησης Κατανάλωσης

$$c_1 = \frac{(1 + \rho)^{1/\theta}}{(1 + \rho)^{1/\theta} + (1 + r_2)^{(1-\theta)/\theta}} \left( 1 + r_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} \right)$$

Είναι απλό να διαπιστώσουμε ότι όσο υψηλότερο είναι το καθαρό ποσοστό διαχρονικής προτίμησης  $\rho$ , τόσο υψηλότερο είναι το ποσοστό του συνολικού του πλούτου που καταναλώνει το νοικοκυριό κατά την πρώτη περίοδο. Αυτό είναι λογικό, καθώς όσο πιο ανυπόμονο είναι το νοικοκυριό, τόσο πιο διατεθειμένο θα είναι να καταναλώσει στην τρέχουσα περίοδο παρά στο μέλλον.

Είναι επίσης εύκολο να δείξουμε ότι εάν η ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης είναι υψηλότερη από τη μονάδα (δηλαδή, εάν  $\theta < 1$ ), τότε το πραγματικό επιτόκιο  $r_2$  έχει αρνητικό αντίκτυπο στο ποσοστό του πλούτου που καταναλώνει το νοικοκυριό στην πρώτη περίοδο. Αυτό συμβαίνει επειδή το αποτέλεσμα διαχρονικής υποκατάστασης είναι ισχυρότερο από το αποτέλεσμα εισοδήματος (πλούτου). Ως εκ τούτου, τα υψηλότερα πραγματικά επιτόκια προκαλούν αύξηση της αποταμίευσης στην περίπτωση αυτή, καθώς μειώνουν τη σχετική τιμή της μελλοντικής κατανάλωσης και ωθούν τα νοικοκυριά να καταναλώνουν περισσότερο στο μέλλον.

Το αντίθετο συμβαίνει εάν η ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης είναι χαμηλότερη από τη μονάδα (δηλαδή, εάν  $\theta > 1$ ). Το πραγματικό επιτόκιο  $r_2$  έχει θετικό αντίκτυπο στο κλάσμα του πλούτου που καταναλώνει το νοικοκυριό κατά την πρώτη περίοδο. Τα υψηλότερα πραγματικά επιτόκια προκαλούν χαμηλότερες αποταμιεύσεις, καθώς το αποτέλεσμα διαχρονικής υποκατάστασης είναι ασθενέστερο από το αποτέλεσμα εισοδήματος σε αυτήν την περίπτωση. Ως εκ τούτου, τα υψηλότερα πραγματικά επιτόκια προκαλούν μείωση της αποταμίευσης στην περίπτωση αυτή.

Στην περίπτωση που η διαχρονική ελαστικότητα της υποκατάστασης είναι ίση με τη μονάδα (δηλαδή, λογαριθμικές προτιμήσεις), το κλάσμα του πλούτου που καταναλώνει το νοικοκυριό στην πρώτη περίοδο είναι ανεξάρτητο από το πραγματικό επιτόκιο και εξαρτάται μόνο από το καθαρό ποσοστό διαχρονικής προτίμησης. Δίνεται από το  $(1 + \rho)/(2 + \rho)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το αποτέλεσμα διαχρονικής υποκατάστασης των πραγματικών επιτοκίων ακυρώνει ακριβώς το αποτέλεσμα εισοδήματος.

# Επιχειρήσεις, Τεχνολογία και η Διαχρονική Πορεία της Πραγματικής Παραγωγής

Για να προσδιορίσουμε πλήρως την πορεία των πραγματικών επιτοκίων και των πραγματικών μισθών, καθώς και του πλούτου των νοικοκυριών, σε αυτό το υπόδειγμα δύο περιόδων, πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των επιχειρήσεων και τις ιδιότητες της ανταγωνιστικής ισορροπίας.

Όπως και στο υπόδειγμα της μιας περιόδου, θα υποθέσουμε ότι η παραγωγή γίνεται από ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, οι οποίες εκμισθώνουν τους συντελεστές παραγωγής από νοικοκυριά, μέσω ανταγωνιστικών αγορών για τους συντελεστές παραγωγής. Όλες οι επιχειρήσεις έχουν πρόσβαση στην ίδια τεχνολογία και αντιμετωπίζουν τις ίδιες τιμές για τους συντελεστές παραγωγής. Παράγουν ένα ομοιογενές προϊόν  $y$ , μέσω της νεοκλασικής συνάρτησης παραγωγής,

$$y_t = A_t F(k_t, l_t) = A_t f(\hat{k}_t) l_t$$

Οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν τα κέρδη τους σε κάθε περίοδο. Έτσι, σε κάθε περίοδο επιλέγουν κεφάλαιο και εργασία προκειμένου να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση κερδών,

$$\mathcal{P}_t = A_t f(\hat{k}_t) l_t - r_t k_t - w_t l_t$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση των κερδών, οι επιχειρήσεις θα απασχολούν κεφάλαιο και εργασία έως το σημείο όπου το οριακό προϊόν του κεφαλαίου είναι ίσο με την τιμή εκμίσθωσης του κεφαλαίου  $r$  και μέχρι το σημείο όπου το οριακό προϊόν της εργασίας είναι ίσο με τον πραγματικό μισθό,  $w$ . Λάβετε υπόψη ότι, λόγω της υπόθεσης των σταθερών αποδόσεων κλίμακας, οι συνολικές αμοιβές των συντελεστών είναι ίσες με τη συνολική παραγωγή σε κάθε περίοδο.

$$r_t = A_t f'(\hat{k}_t), \quad w_t = A_t f(\hat{k}_t) - \hat{k}_t A_t f'(\hat{k}_t)$$

---

# Η Περίπτωση της Συνάρτησης Παραγωγής Cobb Douglas

---

Δεδομένου ότι οι επιχειρήσεις λειτουργούν σε ανταγωνιστικές αγορές, όπου όλες αντιμετωπίζουν τις ίδιες σχετικές τιμές των συντελεστών παραγωγής, και δεδομένου ότι θεωρείται επίσης ότι μοιράζονται την ίδια τεχνολογία, όλες θα επιλέξουν τις ίδιες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε και πάλι την ανάλυσή μας στο πρόβλημα της αντιπροσωπευτικής εταιρείας.

Για αναλυτική απλότητα, θα χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas της μορφής,

$$y_1 = Ak_1^\alpha l_1^{1-\alpha}, y_2 = A(1+g)k_2^\alpha l_2^{1-\alpha}$$

όπου  $g > 0$  είναι ο εξωγενής ρυθμός τεχνικής προόδου μεταξύ των περιόδων 1 και 2. Ο συντελεστής  $g$  μετρά το ρυθμό αύξησης της συνολικής παραγωγικότητας των συντελεστών μεταξύ των δύο περιόδων.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση των κερδών, στην περίπτωση της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas προκύπτει ότι,

$$r_1 = \alpha Ak_1^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha} = \alpha A \hat{k}_1^{\alpha-1}, \quad r_2 = \alpha A(1+g)k_2^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha} = \alpha A(1+g) \hat{k}_2^{\alpha-1}$$

$$w_1 = (1-\alpha)Ak_1^\alpha l_1^{-\alpha} = (1-\alpha)A \hat{k}_1^\alpha, \quad w_2 = (1-\alpha)A(1+g)k_2^\alpha l_2^{-\alpha} = (1-\alpha)A(1+g) \hat{k}_2^\alpha$$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στο να χαρακτηρίσουμε τις ιδιότητες της γενικής οικονομικής ισορροπίας.

# Γενική Ισορροπία στην Περίοδο 1

Στη γενική οικονομική ισορροπία, η απασχόληση, η παραγωγή, η κατανάλωση, οι επενδύσεις, οι πραγματικοί μισθοί και η πραγματική τιμή μίσθωσης του κεφαλαίου, σε κάθε μία από τις δύο περιόδους, θα καθοριστεί από την ισότητα της προσφοράς συντελεστών παραγωγής από τα νοικοκυριά και τη ζήτηση για συντελεστές παραγωγής από τις επιχειρήσεις, καθώς και από την ισότητα της προσφοράς αγαθών και υπηρεσιών από τις επιχειρήσεις με τη ζήτηση για αγαθά και υπηρεσίες από τα νοικοκυριά.

Δεδομένου ότι η προσφορά κεφαλαίου και εργασίας κατά την περίοδο 1 ισούται με τους διαθέσιμους πόρους του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, δηλαδή μία μονάδα κεφαλαίου και μία μονάδα εργασίας ανά νοικοκυριό, το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο στην παραγωγή κατά την περίοδο 1 θα είναι επίσης ίσο με τη μονάδα. Επομένως,

$$\hat{k}_1 = 1, \bar{y}_1 = A, \bar{r}_1 = \alpha A, \bar{w}_1 = (1 - \alpha)A$$

Μια παύλα πάνω από μια μεταβλητή υποδηλώνει την τιμή ισορροπίας της.

Η κατανάλωση ισορροπίας στην περίοδο 1 δεν μπορεί να προσδιοριστεί αν δεν αναλύσουμε επίσης την ισορροπία στην περίοδο 2, καθώς η αποταμίευση εξαρτάται από το πραγματικό επιτόκιο και τους πραγματικούς μισθούς στην περίοδο 2, οι οποίες καθορίζονται από τις συνθήκες οριακής παραγωγικότητας του κεφαλαίου και της εργασίας στην περίοδο 2.

# Γενική Ισορροπία στην Περίοδο 2

Κατά την περίοδο 2, το απόθεμα της εργασίας θα συνεχίσει να ισούται με το 1. Ωστόσο, το κεφάλαιο της περιόδου 2 μπορεί να διαφέρει από το αρχικό κεφάλαιο, ως αποτέλεσμα των αποταμιεύσεων και των επενδύσεων από το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό. Έτσι, παρόλο που οι τιμές ισορροπίας των συντελεστών παραγωγής, καθώς και το σύνολο της παραγωγής στην περίοδο 1 καθορίζονται ως συνάρτηση των αρχικών αποθεμάτων του κεφαλαίου και της εργασίας και της τεχνολογίας της παραγωγής στην περίοδο 1, η κατανάλωση στην περίοδο 1 δεν μπορεί να προσδιοριστεί εκτός εάν λάβουμε υπόψη τον προσδιορισμό της γενικής ισορροπίας στην περίοδο 2.

Δεδομένου ότι η απασχόληση στην περίοδο 2 είναι ίση με τη μονάδα, το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο θα είναι ίσο με,

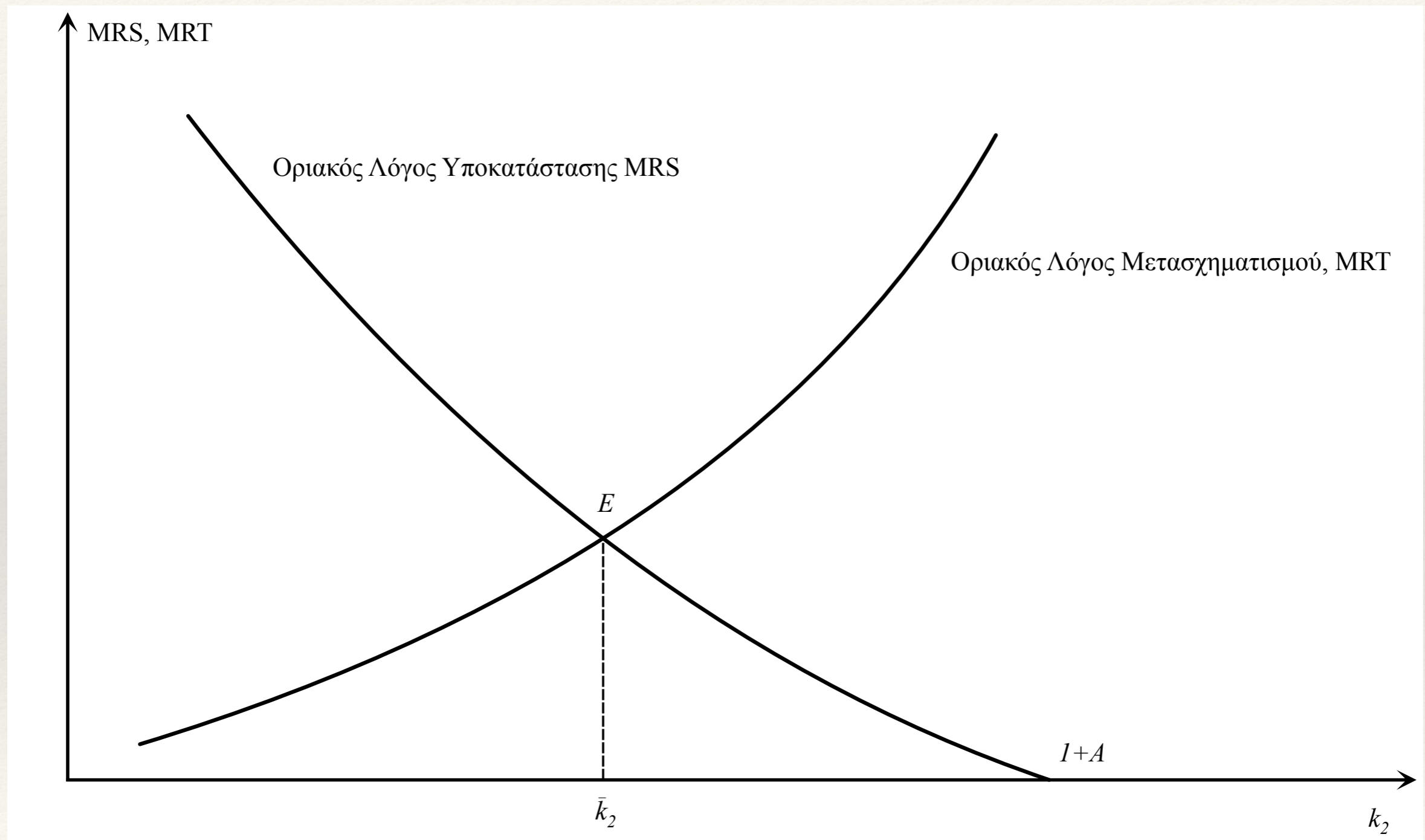
$$\hat{k}_2 = k_2$$

Έτσι, το κλειδί είναι να προσδιοριστεί το απόθεμα κεφαλαίου στην περίοδο 2, το οποίο θα εξαρτηθεί από τις αποταμιεύσεις και τις επενδύσεις στην περίοδο 1.

Το βέλτιστο απόθεμα κεφαλαίου για την περίοδο 2 θα καθοριστεί στο σημείο όπου ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ της κατανάλωσης της περιόδου 2 και της κατανάλωσης της περιόδου 1 είναι ίσος με το οριακό λόγο μετασχηματισμού, ο οποίος είναι ίσος με το αντίστροφο του ενός συν το πραγματικό επιτόκιο της περιόδου 2. Η συνθήκη που καθορίζει το κεφάλαιο της περιόδου 2 είναι η εξίσωση Euler για την κατανάλωση. Χρησιμοποιώντας τις τιμές ισορροπίας για την περίοδο 1 και τον εισοδηματικό περιορισμό των νοικοκυριών, αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα κεφαλαίου ισορροπίας στην περίοδο 2 καθορίζεται από,

$$\frac{1}{1 + \rho} \left( \frac{1 + A - \bar{k}_2}{\bar{k}_2 + A(1 + g)\bar{k}_2^\alpha} \right)^\theta = \frac{1}{1 + \alpha A(1 + g)\bar{k}_2^{\alpha-1}}$$

# Προσδιορισμός του Αποθέματος Κεφαλαίου Ισορροπίας στην Περίοδο 2



# Προσδιορισμός του Αποθέματος Κεφαλαίου Ισορροπίας στην Περίοδο 2

Η καμπύλη με την αρνητική κλίση απεικονίζει την αριστερή πλευρά της εξίσωσης Euler για την κατανάλωση, η οποία είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ των επιπέδων κατανάλωσης των περιόδων 2 και 1. Πρόκειται για μια αρνητική συνάρτηση του κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου επειδή καθώς οι καταναλωτές μειώνουν την κατανάλωση της περιόδου 1 για να αυξήσουν τις επενδύσεις, η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης της πρώτης περιόδου αυξάνεται σε σχέση με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης της περιόδου 2, και ως εκ τούτου ο οριακός λόγος υποκατάστασης μειώνεται.

Η καμπύλη με τη θετική κλίση απεικονίζει τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης Euler για την κατανάλωση, η οποία είναι ο οριακός λόγος μετασχηματισμού μεταξύ των επιπέδων κατανάλωσης στις περιόδους 2 και 1, και πάλι ως συνάρτηση του κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου. Καθώς η επένδυση στη δεύτερη περίοδο οδηγεί σε αύξηση του κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου, το πραγματικό επιτόκιο στην περίοδο 2 μειώνεται, λόγω της μειωμένης οριακής παραγωγικότητας του κεφαλαίου και, συνεπώς, ο οριακός λόγος μετασχηματισμού μεταξύ των επιπέδων κατανάλωσης στις περιόδους 2 και 1 αυξάνεται.

Το κεφάλαιο ισορροπίας καθορίζεται στο σημείο τομής των δύο καμπυλών, όπου ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι ίσος με τον οριακό λόγο μετασχηματισμού.

Εάν το κεφάλαιο της περιόδου 2 ήταν υψηλότερο από το κεφάλαιο ισορροπίας, το πραγματικό επιτόκιο θα ήταν χαμηλότερο και τα νοικοκυριά θα μείωναν αμέσως τις αποταμιεύσεις και τις επενδύσεις, μειώνοντας το κεφάλαιο στο επίπεδο ισορροπίας του. Εάν το κεφάλαιο ήταν χαμηλότερο από το κεφάλαιο ισορροπίας, το πραγματικό επιτόκιο θα ήταν υψηλότερο και τα νοικοκυριά θα αύξαναν αμέσως τις αποταμιεύσεις και τις επενδύσεις, αυξάνοντας το κεφάλαιο στην τιμή ισορροπίας του.

Για να το θέσουμε διαφορετικά, το κεφάλαιο ισορροπίας της δεύτερης περιόδου είναι το απόθεμα για το οποίο το πραγματικό επιτόκιο της δεύτερης περιόδου ωθεί τα νοικοκυριά να παρέχουν επαρκείς αποταμιεύσεις και επενδύσεις κατά την πρώτη περίοδο, προκειμένου να επιτευχθεί αυτό το απόθεμα κεφαλαίου κατά τη δεύτερη περίοδο.

Σημειώστε ότι το βέλτιστο απόθεμα κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου εξαρτάται από παραμέτρους προτίμησης, όπως το καθαρό ποσοστό διαχρονικής προτίμησης  $\rho$  και η ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης  $1/\theta$ , καθώς και τεχνολογικών παραμέτρων, όπως  $A$ ,  $g$  και  $a$ . Προφανώς, εξαρτάται και από τους υφιστάμενους πόρους, οι οποίοι όμως έχουν ομαλοποιηθεί στη μονάδα.

# Προσδιορισμός των Υπόλοιπων Μεταβλητών Ισορροπίας

Έχοντας προσδιορίσει το βέλτιστο απόθεμα κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου από την εξίσωση Euler για την κατανάλωση, οι υπόλοιπες μεταβλητές ισορροπίας προσδιορίζονται από τον εισοδηματικό περιορισμό των νοικοκυριών και τις συνθήκες οριακής παραγωγικότητας για την περίοδο 2. Έτσι έχουμε ότι,

$$\bar{c}_1 = 1 + A - \bar{k}_2, \quad \bar{c}_2 = \bar{k}_2 + A(1 + g)\bar{k}_2^\alpha$$

$$\bar{r}_2 = \alpha A(1 + g)\bar{k}_2^{\alpha-1}, \quad \bar{w}_2 = (1 - \alpha)A(1 + g)\bar{k}_2^\alpha$$

Όλες αυτές οι μεταβλητές προσδιορίζονται ως συναρτήσεις των παραμέτρων προτίμησης, τεχνολογίας και πόρων, που καθορίζουν το κεφάλαιο της δεύτερης περιόδου.



---

# Διαγραμματική Απεικόνιση της Διαχρονικής Ισορροπίας

## Οι Διαχρονικές Καμπύλες Αδιαφορίας

---

Η πλήρης διαχρονική ισορροπία στο υπόδειγμα των δύο περιόδων μπορεί να αναλυθεί με τη χρήση ενός απλού διαγράμματος. Η ανάλυση βρίσκεται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

Οι προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού απεικονίζονται από τις καμπύλες αδιαφορίας μεταξύ της κατανάλωσης στην περίοδο 1 και της κατανάλωσης στην περίοδο 2. Η κλίση αυτών των διαχρονικών καμπυλών αδιαφορίας είναι ο οριακός ρυθμός υποκατάστασης μεταξύ της κατανάλωσης στις δύο περιόδους.

Με την συνάρτηση χρησιμότητας με σταθερή ελαστικότητα διαχρονικής υποκατάστασης (CEIS), όπως έχουμε υποθέσει, η διαχρονική χρησιμότητα του νοικοκυριού δίνεται από,

$$\frac{c_1^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \frac{c_2^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Η κλίση των καμπυλών αδιαφορίας μπορεί να βρεθεί διαφοροποιώντας συνολικά τη διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας σε σχέση με  $c_1$  και  $c_2$  και θέτοντας τη συνολική μεταβολή της χρησιμότητας στο μηδέν. Τότε έχουμε ότι,

$$c_1^{-\theta} dc_1 + \frac{1}{1+\rho} c_2^{-\theta} dc_2 = 0$$

Από την παραπάνω εξίσωση, η κλίση των διαχρονικών καμπυλών αδιαφορίας δίνεται από,

$$\frac{dc_1}{dc_2} = -\frac{1}{1+\rho} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\theta}$$

Η κλίση των καμπυλών αδιαφορίας είναι ίση με τον οριακό λόγο υποκατάστασης μεταξύ της κατανάλωσης στις δύο περιόδους. Είναι αρνητική και μειούμενη στην αναλογία  $c_1/c_2$ .

# Διαγραμματική Απεικόνιση της Διαχρονικής Ισορροπίας

## Η Διαχρονική Καμπύλη Μετασχηματισμού

Ο εισοδηματικός περιορισμός του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού απεικονίζεται ως η διαχρονική καμπύλη μετασχηματισμού. Αυτό δείχνει τη μέγιστη κατανάλωση που μπορεί να επιτευχθεί σε μια περίοδο, για δεδομένο επίπεδο κατανάλωσης την άλλη περίοδο. Η διαχρονική καμπύλη μετασχηματισμού είναι ουσιαστικά ο περιορισμός του προϋπολογισμού του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού και εξαρτάται από τους διαθέσιμους πόρους και τις τεχνολογικές δυνατότητες.

Εάν το νοικοκυριό μεγιστοποιήσει την κατανάλωση της πρώτης περιόδου, καταναλώνοντας το κεφάλαιο και το σύνολο του εισοδήματος της περιόδου 1 κατά την πρώτη περίοδο (δηλαδή, καταναλώνοντας  $1 + A$  στην πρώτη περίοδο), το κεφάλαιο και η κατανάλωση της δεύτερης περιόδου θα είναι μηδέν, καθώς δεν υπάρχει κεφάλαιο και παραγωγή στη δεύτερη περίοδο.

Εάν η κατανάλωση της πρώτης περιόδου ισούται με μηδέν, το νοικοκυριό αποταμιεύει το σύνολο του κεφαλαίου και του εισοδήματός του της πρώτης περιόδου, και το απόθεμα κεφαλαίου της δεύτερης περιόδου μεγιστοποιείται στο  $1 + A$ . Η κατανάλωση της δεύτερης περιόδου στην περίπτωση αυτή μεγιστοποιείται στο  $1 + A + A(1 + g)(1 + A)^{\alpha}$ . Η διαχρονική καμπύλη μετασχηματισμού δείχνει όλους τους άλλους εφικτούς συνδυασμούς μεταξύ των καταναλώσεων των δύο περιόδων.

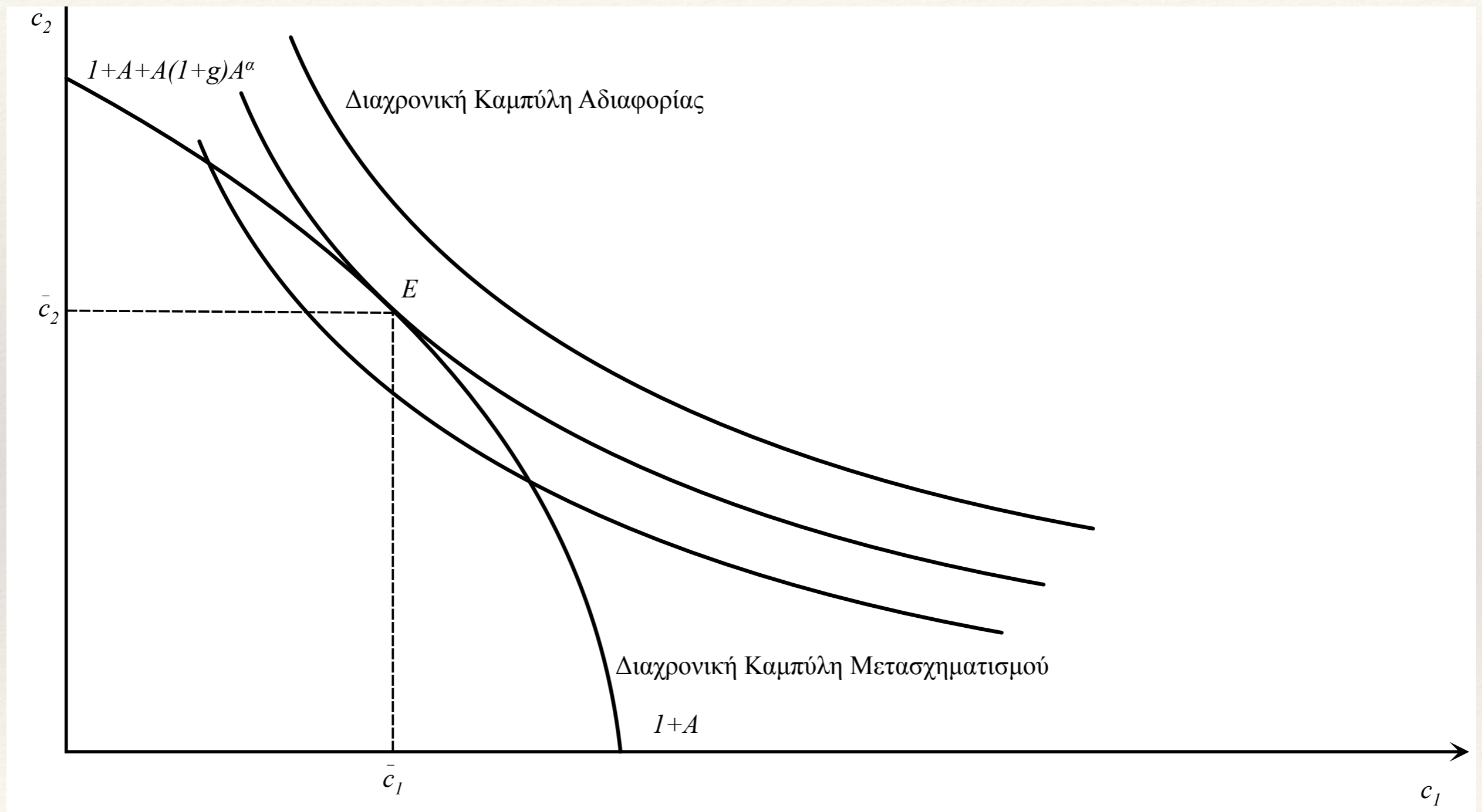
Η κλίση της διαχρονικής καμπύλης μετασχηματισμού μπορεί να βρεθεί διαφοροποιώντας εντελώς τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό του νοικοκυριού, και θέτοντας τη συνολική μεταβολή στο μηδέν. Αυτό μας δίνει,

$$\frac{dc_1}{dc_2} = -\frac{1}{1+r_2} = -\frac{1}{1+aA(1+g)k_2^{\alpha-1}}$$

Πρόκειται για μια αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση του κεφαλαίου κατά την περίοδο 2, δηλαδή, μια αρνητική αλλά αυξανόμενη συνάρτηση του λόγου  $c_1/c_2$ . Ως εκ τούτου, η καμπύλη μετασχηματισμού είναι κοίλη προς στην αρχή των αξόνων.

Η διαχρονική ισορροπία βρίσκεται στο σημείο  $E$ , όπου η καμπύλη μετασχηματισμού εφάπτεται στην υψηλότερη δυνατή καμπύλη αδιαφορίας. Αυτό το σημείο είναι η μόνη διαχρονική ισορροπία για αυτό το υπόδειγμα. Λόγω της υπόθεσης του μη κορεσμού, το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό θα επιλέγει πάντα σημεία επάνω στη διαχρονική καμπύλη μετασχηματισμού. Για οποιοδήποτε σημείο άλλο από το  $E$ , το νοικοκυριό μπορεί να αυξήσει τη διαχρονική χρησιμότητά του αλλάζοντας την αναλογία  $c_1/c_2$ .

# Διαγραμματική Απεικόνιση της Διαχρονικής Ισορροπίας



---

# Ιδιότητες της Ανταγωνιστικής Ισορροπίας στο Υπόδειγμα Δύο Περιόδων

---

Η ανταγωνιστική ισορροπία εξαρτάται από τις προτιμήσεις και του πόρους του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού καθώς και από την τεχνολογία παραγωγής που χρησιμοποιείται από την αντιπροσωπευτική επιχείρηση.

Λόγω της υπόθεσης για μη κορεσμό, τα νοικοκυριά εκμισθώνουν το σύνολο των πόρων που διαθέτουν για να χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή και καταναλώνουν τόσο το τρέχον εισόδημά τους όσο και το κεφάλαιο τους στη δεύτερη περίοδο.

Οι αποταμιεύσεις εξαρτώνται από το πραγματικό επιτόκιο, το καθαρό ποσοστό διαχρονικής προτίμησης και την ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης των νοικοκυριών. Στην περίπτωση που η ελαστικότητα της διαχρονικής υποκατάστασης της κατανάλωσης είναι ίση με τη μονάδα, οι αποταμιεύσεις είναι ανεξάρτητες από το πραγματικό επιτόκιο.

Το πραγματικό επιτόκιο της δεύτερης περιόδου καθορίζεται από την ισότητα των αποταμιεύσεων και των επενδύσεων.

Στην ισορροπία, οι κύριοι καθοριστικοί παράγοντες των πραγματικών μεταβλητών είναι οι υφιστάμενοι πόροι, οι προτιμήσεις των νοικοκυριών και η τεχνολογία της παραγωγής.

Υπάρχει τέλος πλήρης απασχόληση τόσο του κεφαλαίου όσο και της εργασίας.

Στο βαθμό που οι αγορές είναι πλήρως ανταγωνιστικές, η ανταγωνιστική ισορροπία είναι βέλτιστη κατά Pareto και ικανοποιεί τα δύο θεωρήματα των οικονομικών της ευημερίας.

---

# Επιπτώσεις για τη Θεωρία της Οικονομικής Μεγέθυνσης και τη Θεωρία των Οικονομικών Διακυμάνσεων

---

Το ανταγωνιστικό υπόδειγμα αποταμιεύσεων και επενδύσεων δύο περιόδων που εξετάσαμε μπορεί να θεωρηθεί ως η βάση μιας ομάδας υποδειγμάτων οικονομικής μεγέθυνσης και οικονομικών διακυμάνσεων, βασισμένων στη δυναμική βελτιστοποίηση εκ μέρους των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων.

Το υπόδειγμα της βέλτιστης οικονομικής μεγέθυνσης και των αποταμιεύσεων του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού του Ramsey (1928), ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία της θεωρίας της μεγέθυνσης, δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια επέκταση του μοντέλου των δύο περιόδων σε οικονομίες που διαρκούν για έναν άπειρο αριθμό περιόδων. Στην πραγματικότητα, αυτή η επέκταση πραγματοποιήθηκε από τον Ramsey (1928), ακόμη και πριν από τη δημοσίευση του υποδείγματος των δύο περιόδων από τον Fisher (1930).

Υποδείγματα επαλλήλων γενεών, όπως τα υποδείγματα των Diamond (1965) και Blanchard (1985) -Weil (1989), βασίζονται επίσης στο διαχρονικό υπόδειγμα των δύο περιόδων του Fisher (1930). Ουσιαστικά, αποτελούν επέκταση του υποδείγματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού σε οικονομίες στις οποίες τα νοικοκυριά ανήκουν σε διαφορετικές γενεές. Έχουν δηλαδή διαφορετικές ημερομηνίες γέννησης. Ωστόσο, όπως θα δούμε, τα υποδείγματα επαλλήλων γενεών δεν μοιράζονται τις ιδιότητες του υποδείγματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού. Ο λόγος είναι ότι στα υποδείγματα επαλλήλων γενεών χωρίς διασυνδέσεις μεταξύ των γενεών, οι τρέχουσες γενεές δεν λαμβάνουν υπόψη την ευημερία των μελλοντικών γενεών, και επομένως οι αποταμιεύσεις είναι χαμηλότερες από αυτές που θα ήταν κοινωνικά βέλτιστες.

Το υπόδειγμα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού δύο περιόδων αποτελεί τη βάση και των ανταγωνιστικών θεωριών των οικονομικών διακυμάνσεων, με τη μορφή του στοχαστικού υποδείγματος μεγέθυνσης και των νέων κλασικών οικονομικών. Αποτελεί επίσης τη βάση και των νέων κενσινιανών υποδειγμάτων των οικονομικών διακυμάνσεων.

---

# Επέκταση του Διαχρονικού Υποδείγματος των Δύο Περιόδων

---

Το διαχρονικό υπόδειγμα δύο περιόδων που εξετάσαμε σε αυτή τη διάλεξη είναι προφανώς ένα απλοποιημένο και περιοριστικό παράδειγμα. Μία από τις κύριες απλουστεύσεις αφορά την αντιμετώπιση του χρόνου, η οποία περιορίζεται μόνο σε δύο χρονικές περιόδους. Ωστόσο, το υπόδειγμα μπορεί να επεκταθεί με απλό τρόπο επιτρέποντας επιπλέον χρονικές περιόδους.

Για παράδειγμα, θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι ο χρόνος είναι ένας ακέραιος που ανήκει σε οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου των ακέραιων αριθμών  $\mathbb{Z}$ , από το μείον άπειρο έως το συν άπειρο.

Μαθηματικά, με έναν άπειρο αριθμό χρονικών περιόδων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι,  $t = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$  ή ότι  $t \in \mathbb{Z}$ .

Η διαχρονική ανάλυση θα μπορούσε επίσης να περιορίζεται σε οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου ακέραιων αριθμών, όπως το σύνολο θετικών φυσικών αριθμών ή σε οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο of ή .

# Επέκταση της Διαχρονικής Συνάρτησης Χρησιμότητας και του Διαχρονικού Εισοδηματικού Περιορισμού

Για παράδειγμα, η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας δύο περιόδων του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού θα μπορούσε να επεκταθεί σε  $T$  περιόδους και να λάβει τη μορφή,

$$U = \sum_{t=0}^T \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t u(c_t)$$

Ομοίως, ο διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός των δύο περιόδων του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού θα μπορούσε να επεκταθεί σε  $T$  περιόδους και να λάβει τη μορφή,

$$\sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{1+r} \right)^{t-1} c_t = 1 + r + \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{1+r} \right)^{t-1} w_t$$

όπου  $r$  είναι το πραγματικό επιτόκιο.

Αν το νοικοκυριό έχει άπειρο χρονικό ορίζοντα, τότε λαμβάνουμε το όριο των συναρτήσεων αυτών καθώς το τείνει στο άπειρο.

Αυτή είναι η βάση του υποδείγματος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού του Ramsey (1928).

---

# Βιβλιογραφία

---

Alogoskoufis, G. (2019), *Dynamic Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge, MA. (Chapter 2).

## Το Διαχρονικό Υπόδειγμα Δύο Περιόδων

Fisher, I. (1930), *The Theory of Interest*, Macmillan, New York.

## Το Υπόδειγμα του Αντιπροσωπευτικού Νοικοκυριού

Ramsey, F. (1928), "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, 38 (152), pp. 543-559.

Cass, D. (1965), "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 32 (3), pp. 233-240.

Koopmans, T. (1965), "On the Concept of Optimal Economic Growth", in *The Economic Approach to Development Planning*, Elsevier, Amsterdam.

## Υποδείγματα Επαλλήλων Γενεών

Allais, M. 1947. *Economie et Interet*. Imprimerie National, Paris.

Blanchard, O.J. (1985), "Debts, Deficits and Finite Horizons", *Journal of Political Economy*, 93 (2), pp. 223-247.

Diamond, P. (1965), "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review*, 55 (5), pp. 1126-1150.

Samuelson, P.A. (1958), "An Exact Consumption-Loan Model of Interest, with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, 66 (6), pp. 467-482.

Weil, P. (1989), "Overlapping Families of Infinitely-Lived Agents", *Journal of Public Economics*, 38 (2), pp. 183-198.